PART4　階差数列と一般項

例題

次の数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1)　1，4，8，13，19，……

(2)　1，2，5，14，41，……

Point Pickup

練習

次の数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1)　2, 6, 12, 20, 30, ……

(2)　5, 7, 11, 19, 35, ……

第 2 講　PART4 確認問題

次の数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

1　1，2，7，16，29，……

$$a_n = \boxed{\text{ア}}\,n^2 - \boxed{\text{イ}}\,n + \boxed{\text{ウ}}$$

2　3，5，11，29，83，……

$$a_n = \boxed{\text{エ}}^{\,n-1} + \boxed{\text{オ}}$$

PART4　階差数列と一般項

例題

次の数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1)　1，4，8，13，19，……　　(2)　1，2，5，14，41，……

(1)　数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とすると，$\{b_n\}$ は

3，4，5，6，……

これは，初項3，公差1の等差数列より，$b_n=3+(n-1)\cdot 1=n+2$ と表される。

よって，$n \geqq 2$ のとき

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k=1+\sum_{k=1}^{n-1}(k+2)=1+\frac{1}{2}(n-1)n+2(n-1)=\frac{1}{2}(n^2+3n-2)$$

この式において，$n=1$ のとき $\frac{1}{2}(1^2+3\cdot 1-2)=1$ であり，これは a_1 と一致する。

よって，この式は $n=1$ のときも成り立つ。

したがって，求める一般項は　$a_n=\frac{1}{2}(n^2+3n-2)$

(2)　数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とすると，$\{b_n\}$ は

1，3，9，27，……

これは，初項1，公比3の等比数列より，$b_n=1\cdot 3^{n-1}=3^{n-1}$ と表される。

よって，$n \geqq 2$ のとき

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k=1+\sum_{k=1}^{n-1}3^{k-1}=1+\frac{1\cdot(3^{n-1}-1)}{3-1}=\frac{1}{2}(3^{n-1}+1)$$

この式において，$n=1$ のとき $\frac{1}{2}(3^0+1)=1$ であり，これは a_1 と一致する。

よって，この式は $n=1$ のときも成り立つ。

したがって，求める一般項は　$a_n=\frac{1}{2}(3^{n-1}+1)$

練習

次の数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1)　2，6，12，20，30，……　　　　(2)　5，7，11，19，35，……

(1)　数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とすると，$\{b_n\}$ は

4，6，8，10，……

これは，初項 4，公差 2 の等差数列より，$b_n=4+(n-1)\cdot 2=2n+2$ と表される。

よって，$n\geqq 2$ のとき

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k=2+\sum_{k=1}^{n-1}(2k+2)=2+2\cdot\frac{1}{2}(n-1)n+2(n-1)=n^2+n$$

この式において，$n=1$ のとき $1^2+1=2$ であり，これは a_1 と一致する。

よって，この式は $n=1$ のときも成り立つ。

したがって，求める一般項は $a_n=n^2+n=n(n+1)$

(2)　数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とすると，$\{b_n\}$ は

2，4，8，16，……

これは，初項 2，公比 2 の等比数列より，$b_n=2\cdot 2^{n-1}=2^n$ と表される。

よって，$n\geqq 2$ のとき

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k=5+\sum_{k=1}^{n-1}2^k=5+\frac{2\cdot(2^{n-1}-1)}{2-1}=2^n+3$$

この式において，$n=1$ のとき $2^1+3=5$ であり，これは a_1 と一致する。

よって，この式は $n=1$ のときも成り立つ。

したがって，求める一般項は $a_n=2^n+3$

第 2 講　PART4 確認問題 解答

1 **[正解]** ア：2，イ：5，ウ：4

[解説]

数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とすると

$\{a_n\}$：1　2　7　16　29　……
$\{b_n\}$：　1　5　9　13　……

よって，$\{b_n\}$ は，初項 1，公差 4 の等差数列であるから

$$b_n=1+(n-1)\cdot 4 \quad \text{[A]}$$
$$=4n-3$$

$n\geqq 2$ のとき

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k \quad \text{[B]}$$
$$=1+\sum_{k=1}^{n-1}(4k-3)$$
$$=1+4\cdot\frac{1}{2}(n-1)n-3(n-1)$$
$$=2n^2-5n+4$$

この式において，$n=1$ のとき，$2-5+4=1$ であり，これは a_1 と一致する。

よって，この式は $n=1$ のときも成り立つ。

したがって，求める一般項は $\boldsymbol{a_n=2n^2-5n+4}$

[A]　初項 a，公差 d の等差数列の一般項は
$a_n=a+(n-1)d$

[B]　数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とすると，$n\geqq 2$ のとき
$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k$

2 **[正解]** エ：3，オ：2

[解説]

数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とすると

$\{a_n\}$： 3　5　11　29　83　……
$\{b_n\}$：　2　6　18　54　……

よって，$\{b_n\}$ は，初項 2，公比 3 の等比数列であるから

$$b_n = 2 \cdot 3^{n-1}$$ [C]

$n \geqq 2$ のとき

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k$$

$$= 3 + \sum_{k=1}^{n-1} 2 \cdot 3^{k-1}$$ [D]

$$= 3 + \frac{2\left(3^{n-1}-1\right)}{3-1}$$

$$= 3^{n-1} + 2$$

この式において，$n=1$ のとき，$3^0+2=3$ であり，これは a_1 と一致する。

よって，この式は $n=1$ のときも成り立つ。

したがって，求める一般項は $\boldsymbol{a_n = 3^{n-1}+2}$

[C]　初項 a，公比 r の等比数列の一般項は
$a_n = ar^{n-1}$

[D]　$\sum_{k=1}^{n-1} 2 \cdot 3^{k-1}$ は，初項 2，公比 3 の等比数列の初項から第 $(n-1)$ 項までの和である。